**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение**

**Тугустемирская средняя общеобразовательная школа**

**РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ**

**В КУРСЕ ОБЩЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

Работу выполнил: учитель математики

Зайцев Алексей Иванович.

Тугустемир 2015

**Содержание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Введение** | | 4 |
| **Глава I. Решение алгебраических уравнений** | | 6 |
|  | 1.1 Исходные понятия теории многочленов | 6 |
|  | 1.2 Общее решение уравнений первой, второй, третьей и четвёртой степени | 8 |
| **Глава II. Алгебраические уравнения с действительными коэффициентами** | | 14 |
|  | 2.1 Многочлены над полем действительных чисел | 14 |
|  | 2.2 Уравнения третьей степени с действительными коэффициентами | 14 |
|  | 2.3 Формулы Виета | 16 |
|  | 2.4 Границы действительных корней | 17 |
|  | 2.5 Теорема Штурма | 23 |
|  | 2.6 Приближенное вычисление корней уравнения | 28 |
|  | 2.6.1 Метод линейной интерполяции | 29 |
|  | 2.6.2 Метод Ньютона | 30 |
|  | 2.7 Частные методы решения уравнений | 33 |
| **Глава III. Методические рекомендации по изучению решения алгебраических уравнений высших степеней в средней школе** | | 40 |
| 3.1 Решение задач | | 40 |
| 3.2 Методические рекомендации по изучению решения алгебраических уравнений высших степеней в средней школе | | 56 |
| **Заключение** | | 60 |
| **Список использованной литературы** | | 61 |

**Введение**

Данная работа посвящена вопросам решения алгебраических уравнений, а точнее изучению методов нахождения корней уравнения от одной переменной высших степеней. Всем известны существующие формулы для решения квадратных уравнений, естественно было искать аналогичные формулы для решения более высоких степеней. Исторически этот раздел алгебры так и развивался, причём формулы для решения третьей степени были найдены ещё в XVI веке. Тогда профессор математики болонского университета Сципион дель Ферро (1465-1526) впервые нашел алгебраическое решение уравнения третьей степени: *x3 + px = 0.* После смерти профессора дель Ферро его ученик Фиоре, вызвал на публичный диспут одного из виднейших математиков того времени Никколо Тарталья (1499-1557). Готовясь к диспуту, Тарталья открыл формулу для нахождения корней кубических уравнений в радикалах. После диспута Тарталья стал знаменитым во всей Италии, но продолжал держать открытую формулу в секрете. Другой итальянский математик Джерол (1501 - 1576) узнал от Тартальи правило решения неполного кубического уравнения и дал «священную клятву», что никому не раскроет этой тайны. Правда, Тарталья лишь частично раскрыл свою тайну, но Кардано, познакомившись с рукописями покойного профессора дель Ферро, получил полную ясность в этом вопросе. В 1545 г. Кардано опубликовал знаменитый свой труд «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге», где впервые опубликовал формулу для решения неполного кубического уравнения. Такова полная драматизма история открытия формулы корней неполного кубического уравнения. В той же книге Кардано привел алгебраическое решение уравнения четвертой степени. Это открытие сделал один из его учеников Лудовико Феррари (1522 - 1565). После этого начались настойчивые поиски формул, которые сводили бы решение уравнений высших степеней к извлечению корней («решение в радикалах»). Эти поиски продолжались около трех столетий, и лишь в начале XIX в. норвежский ученый Нильс Хенрик Абель (1802 -1829) и французский ученый Эварист Галуа (1811 -1832) доказали, что уравнения степеней выше четвертой в общем случае в радикалах не решаются.

*Объект исследования:* алгебра полиномов.

*Предмет исследования:* алгебраические уравнения высших степеней.

*Цель работы*: вычисление корней уравнений высших степеней.

*Задачи работы:*

* Проанализировать научную и учебную литературу по решению уравнений высших степеней;
* Изучить различные методы вычисления корней, в том числе и приближенные;
* Рассмотреть решение уравнений в радикалах третьей и четвёртой степени;
* Подобрать систему задач иллюстрирующих теорию и решить их;
* Разработать методические рекомендации для учащихся общеобразовательных учреждений по решению уравнений высших степеней.

**Глава I. Решение алгебраических уравнений**

* 1. **Исходные понятия теории многочленов**

Общий вид уравнения n-й степени (где n – некоторое целое положительное число) есть:

*a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an = 0* (1)

Коэффициенты *a0 ,a1 , a2 ,an-1 , an* , этого уравнения мы будем считать произвольными комплексными числами, причём старший коэффициент *a0* должен быть отличен от нуля.

Если написано уравнение (1), то всегда предполагается, что требуется его решить, т. е. требуется найти такое числовое значение для неизвестного *x*, которое удовлетворяет этому уравнению и после подстановки вместо неизвестного и выполнения всех указанных операций обращает левую часть уравнения (1) в нуль.

Целесообразно, заменить задачу решения уравнения (1) задачей нахождения корней левой части этого уравнения:

*a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an* , называемом многочленом.

Если  *f(x)* = *a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an* (2)

есть некоторый многочлен, а *с* – некоторое число, то число

*f(с)* = *a0 с n + a1 с n-1 + … + an-1 с +an* , полученное заменой в выражении (2) для *f(x)* неизвестного *x* числом *с* и последующим выполнением всех указанных операций, называется значением многочлена *f(x)* при *x=c*.

Если *f(x)=*0, т.е. многочлен *f(x)*  обращается в нуль при подстановке в него числа *с* вместо неизвестного, то *с* называют корнем многочлена *f(x)*  (или уравнения *f(x)=*0).

Если мы будем делить многочлен *f(x)* на произвольный многочлен первой степени, то остаток будет некоторым числом *r.*

Имеет место следующая теорема:

Остаток от деления многочлена *f(x)*  на линейный многочлен (*x-c*) равен значению *f(с)* многочлена *f(x)* при *x=c*.

Важно следствие теоремы: Число *c* тогда и только тогда будет корнем многочлена *f(x)* , если *f(x)* делится на (*x-c*).

Таким образом, разыскание корней многочлена *f(x)*  равносильно разысканию его линейных делителей.

Имеем два метода деления многочлена *f(x)* на линейный двучлен (*х-с*): алгоритм деления многочленов Евклида и метод Горнера. Следует заметить, что метод Горнера является более простым, так как представляет собой упрощённый алгоритм Евклида, где в качестве делителя берётся двучлен (*х-с*).

Если *с* – корень многочлена *f(x)* , т. е. *f(x)* делится на (*х-с*), может оказаться, что *f(x)*  делится не только на первую степень линейного двучлена (*х-с*), но и на более высокую его степень

*f(x)=(x-c)k·φ(x) ,*

где *φ(x)* на (х-с) уже не делится. Тогда *k* называют кратностью корня *с* в многочлене *f(x)* , а сам корень *с* – *k* – кратным корнем этого многочлена. Если *k* =1, то корень *с* - простой.

Справедлива основная теорема алгебры комплексных чисел:

Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.[7]

Пусть дан многочлен n-й степени, n≥1,

*f(x)* = *a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an* ,

где *a* – любой комплексный коэффициент, то согласно основной теоремы о существовании корня, придём к разложению:

*f(x)= (x-α1)· (x-α2)· … ·(x-αn)* , (3)

где α – корни многочлена.

Разложение (3) является для многочлена *f(x)* единственным с точностью до порядка сомножителей разложения такого вида.

**1.2 Общее решение уравнений первой, второй, третьей и четвёртой степени**

1. Линейные уравнения

Имеем уравнение вида *ах + b = 0* , тогда естественно получим формулу для вычисления корней этого уравнения *х = - b:а.*

2. Квадратное уравнение

Пусть дано квадратное уравнение

*x2 + px + = 0*

с любыми комплексными коэффициентами: старший коэффициент без ограничения общности можно считать равным единице. Это уравнение можно переписать в виде:

( *x +* )2 + ( q – ) = *0*

Как мы знаем, из комплексного числа – q можно извлечь квадратный корень, не выходя за пределы системы комплексных чисел. Два значения этого корня, отличаются друг от друга лишь знаком, мы запишем в виде

± , поэтому x + = ± ,

т. е. корни заданного уравнения можно находить по обычной формуле:

*x* = - ±

3. Кубичные уравнения

Выведем формулы для решения кубичных уравнений, аналогичные формуле для квадратных уравнений, которые будут выражать корни кубичного через его коэффициенты, а также действия сложение, вычитание, умножение, деления и извлечение корня. Такие формулы называют решением в радикалах. Рассмотрим уравнение:

*a0 x 3 + a1 x2 + a2 x +a3 = 0 , (а≠0)*

Поделив уравнение на *a0* получим приведённое уравнение:

*x3 + x2 + x + = 0,* заменив  *=a, =b, =c,* получим:

*x 3 + ax2 + bx +c = 0 ,* (1)

где a, b, c – любые комплексные коэффициенты.

Заменяя в уравнении (1) переменную *x* на переменную *y,* осуществив замену *x=y+v*, где *v* – число рациональное, получим:

*(y+v)3+a(y+v)2+b(y+v)+c=0.*

*y3+3y2v+3yv2+v3+ ay2+2ayv +av2+by+bv+c=0.*

запишем в порядке убывания степеней y:

*y3+(3v+а)y2+(3v3+ 2av+b)y +(v3+av2+bv+c)=0*

обозначим *р=3v3+2av+b, q= v3+av2+bv+c ,*

взяв *v=*  , т.е. *3v+a=0,* получим неполное кубическое уравнение:

*y3 + py + q = 0.* (2)

Решив уравнение (2), мы решим наше исходное уравнение. Для решения уравнения (2), введём ещё две вспомогательные переменные α и β, считая y = α + β, произведём замену:

*(α + β)3 + p*(α + β*)+q= 0,*

*α3 + 3α2β + 3αβ2 + β3 + p(α + β) + q = 0,*

*(α + β)3 +3αβ(α + β) + p(α + β) + q = 0,*

*(α3 + β3 + q) + (α + β)(3αβ + p) = 0.*

Взяв *3αβ + p = 0,* т.е.

*αβ =*  (3).

Тогда уравнение примет вид: *α3 + β3 + q = 0,*

*α3 + β3 = - q. (4)*

Возведём (3) в третью степень:

*α3 + β3 =*  (5)

Равенства (4) и (5) показывают, что числа *α3 + β3* служат корнями квадратного уравнения

*z2 + qz - = 0* (6)

Решая уравнение (6), мы получим:

*z1,2 = ±*

откуда:

α = , β = (7),

мы приходим к следующей формуле Кардано, выражающей корни уравнения (2) через его коэффициенты при помощи квадратных и кубичных радикалов:

*y = α + β = +* (8).

Кубичный радикал имеет в поле комплексных чисел три значения, следовательно формулы (7) дают три значения для α и три значения для β. Следует помнить, что применяя формулу Кардано, нельзя комбинировать любое значение радикала α с любым значением радикала β: для данного значения α следует брать лишь то из трёх значений β, которое удовлетворяет условию (3).

Как же найти такие пары? Покажем как это сделать. Пусть у нас уже есть одна такая пара: α1 , β1 и *α1 · β1 =*  . Другие пары найдём, используя значение кубичного корня из единицы.

Вычислим ε :

ε = = = 1 · (cos), k = 0,1,2 .

ε0 = 1. ε1 = cos = ;

ε2 = cos = ;

Нам известно, что если есть одно значение корня n-ой степени из комплексного числа, то все n-значений этого корня можно найти умножением одного известного значения на значения корня: .

Итак, если нам известно α1, то

α1 = α1 · ε0 = α1

α2 = α1 · ε1 = α1 · (),

α3 = α1 · ε2 = α1 · ().

Таким же образом находим значения для β:

β1 = β1 · ε0 = β1

β2 = β1 · ε1 = β1 · (),

β3 = β1 · ε2 = β1 · ().

У нас *α1 и β1* комбинировались для нахождения *у.* Можно показать, что *α2* и *β3* комбинируются, т. е. *α2 · β3 =* :

*α2 · β3 =* ()·() = = = .

Аналогично, можно показать, что *α3* и *β2* комбинируются: *α3 · β2 =* .

В итоге получаем три значения *у*: *у1=*; *у2=*; *у3=*

И соответственно три значения *х*: *х1 = у1 -* ; *х2 = у2 -* ; *х3 = у3 -* ;

4. Уравнения 4-й степени

Решение уравнения четвёртой степени

*y4 + ay3 + by2 +cy + d = 0* (10)

с произвольными комплексными коэффициентами сводится к решению некоторого вспомогательного кубичного уравнения. Достигается это следующим методом, принадлежащим Феррари.

Предварительно уравнение (10) подстановкой приводится к виду:

*x4 + px2 + qx + r = 0* (11)

Затем левая часть этого уравнения тождественно преобразуется при помощи вспомогательного параметра *α:*

*x4 + px2 + qx + r =* (*x2 + + α*) + *qx + r α2 pα*  или:

(*x2 + + α*)2 = 0 (12)

Подберём теперь α так, чтобы многочлен, стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, т. е. должно выполняться равенство:

q2 = 0. (13)

Равенство (13) является кубичным уравнением относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами. Это уравнение имеет, три комплексных корня. Пусть α0 будет один из них, он выражается через формулы Кардано при помощи радикалов через коэффициенты равнения (13), т.е. через коэффициенты уравнения (11).

При этом выборе значения α многочлен, стоящий в квадратных скобках в (12), имеет двукратный корень , поэтому уравнение (12) принимает вид

(*x2 + + α0*) = 0 ,

Т.е. оно распадается на два квадратных уравнения:

(14)

Так как от уравнения (11) к уравнению (14) мы пришли при помощи тождественных преобразований, то корни уравнений (14) будут служить корнями и для уравнения (11). Мы также видим, что корни выражаются через коэффициенты при помощи радикалов.

5. Метод решения уравнений высших степеней Эйлера

Следующий этап развития теории решения уравнений связан с творчеством Леонарда Эйлера (1707 - 1783), который, как и все предшественники, считал возможным решение уравнений любой степени. Он установил, что уравнения второй, третьей, четвёртой степеней сводятся к уравнениям первой, второй и третьей степеней, которые он назвал "разрешающими уравнениями", резольвентами. Резольвенту приведённого кубического уравнения

x3 + b2x + b3 = 0

Эйлер получил, положив:

Для приведённого уравнения четвёртой степени:

x4 + b2x2 + b3x + b4 = 0

Эйлер рекомендовал подстановку:

Таким образом он открыл другой способ решения уравнения четвёртой степени, отличный от решения Феррари.

**Глава II. Алгебраические уравнения с действительными коэффициентами**

**2.1 Многочлены над полем действительных чисел**

Рассмотрим многочлен n-й степени (n≥1) с действительными коэффициентами:

*f(x)* = *a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an* ,

И если комплексное ( но не действительное) число α служит корнем многочлена *f(x)* ,то корнем для *f(x)* будет и сопряженное числа ά.

Таким образом можно сделать вывод:

Всякий многочлен *f(x)* с действительными коэффициентами представим, притом единственным образом (с точностью до порядка множителей) , в виде произведения своего старшего коэффициента *a0* и нескольких многочленов с действительными коэффициентами, линейных вида (*х-* α) , соответствующих его действительным корням, и квадратных вида:

*φ(x)= (x-α)· (x-* ά*) = x2 – (*α- ά*)х +* αά ,

соответствующих парам спряженных комплексных корней.

**2.2 Уравнения третьей степени с действительными коэффициентами**

Рассмотрим вопрос о том, какие корни имеет кубичное уравнение

*y3 + py + q = 0* (1)

Если коэффициенты его *p* и *q* являются действительными числами. Для этого обозначим выражение под знаком √

D =

Назовём дискриминантом неполного кубического уравнения.

Возможны три значения дискриминанта:

1-й случай. Пусть D > 0. Под знаком квадратных корней формулы Кардано стоят положительные числа, а под знаками кубичных корней – числа действительные. Но кубичный корень из действительного числа имеет одно действительное значение и два комплексно-сопряженных.

Пусть α1 – действительное значение радикала α, а β – действительное значение радикала β. Отсюда следует, что *y1* является действительным числом. Найдём:

*у2 = α2 + β3 = α1 ·* () + β1 · () = · ,

*y3 = α3 + β2 = α1 ·* () + β1 · () = ·

Итак: если D > 0, то неполное кубичное уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных.

2-й случай. D = 0. Тогда из формулы Кардано следует:

α = ; β = .

Пусть α1 – действительное значение радикала, тогда, учитывая что

– является действительным числом а, также р и α – являются действительными числами, можно утверждать, что .

*у2 = α2 + β3 = α1 ·* () + β1 · () = ,

*y3 = α3 + β2 = α1 ·* () + β1 · () = .

При D = 0, все корни – действительные числа, и два их них равны.

3-й случай. D < 0. Тогда под знаком квадратных корней формул Кардано стоят отрицательные действительные числа. Квадратные корни из этих отрицательных действительных чисел – числа комплексно-сопряженные, под знаком кубических корней также стоят комплексно-сопряженные числа. Наше уравнение имеет нечётную степень и среди его трёх комплексных корней должен быть хотя бы один действительный корень. Допустим это будет корень *у1 =* . Так как действительны и сумма чисел , и их произведение, равное , то корни *y2* и *y3* также будут действительными числами.

Мы получили, что все три корня уравнения (1) действительны и среди них нет равных.

Таким образом, если D < 0, то уравнение (1) имеет три различных действительных корня, однако их разыскание по формуле Кардано требует извлечения кубичных корней из комплексных чисел. Это можно сделать только перейдя к тригонометрической форме этих чисел, но не всегда это можно сделать точно. Поэтому запись корней с помощью радикалов теряет практическое значение. В рассматриваемом случае, корни уравнения (1) вообще никаким образом не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов с действительными подкоренными выражениями. Этот случай решения уравнения называют неприводимым.

**2.3 Формулы Виета**

Пусть дан многочлен *f(x)* степени *n* со старшим коэффициентом 1,

*f(x)* = *x n + a1 x n-1 + a2xn-2 +… + an-1 x +an* (1) ,

и пусть α1 , α2 , …, αn – его корни. Тогда *f(x)*  обладает следующим разложением:

*f(x)= (x-α1)· (x-α2)· … ·(x-αn).*

Перемножая скобки, стоящие справа, а затем приводя подобные члены и сравнивая полученные коэффициенты с коэффициентами из (1) , мы получим следующие равенства, называемые формулами Виета и выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

*α1 = - (α1 + α1 +…+ α1) ,*

*α2 = α1 α2 + α1 α3 +…+ α1 αn + α2 α3 +…+ αn-1 αn ,*

*α3 = -( α1 α2 α3 + α1 α2 α4 +…+ αn-2 αn-1 αn )*

*………………………………………………………………*

*αn-1 = (-1)n-1(α1 α2 …αn-1 + α1 α2 αn-2 αn +…+ α2 α3 … αn) ,*

*α1 αn = (-1)n α1 α2 … αn .*

Таким образом, в правой части *k-*го равенства, *k* = 1, 2, … , n , стоит сумма всевозможных произведений по *k* корней, взятая со знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечетности *k.*

При n = 2 эти формулы превращаются в известную связь между корнями и коэффициентами квадратного многочлена. При n = 3, т.е. для кубичного многочлена, эти формулы принимают вид:

*α1 = - (α1 + α2 + α3 ), α2 = α1 α2 + α1 α3 + α2 α3 , α3 = - α1 α2 α3 .*

Если старший коэффициент *α0*  многочлена *f(x)* отличен от 1, то для применения формул Виета необходимо сначала разделить все коэффициенты на *α0* , что не влияет на корни многочлена. Таким образом, в этом случае формулы Виета дают выражение для отношений коэффициентов к старшему коэффициенту.

Формулы Виета облегчают написание многочлена по его корням. Проиллюстрируем это на примере. Найдём многочлен *f(x)* четвёртой степени, который имеет корни: -2; 2; 3; 5. Применяя формулы, получим:

*α1 =* - (-2+2+3+5) = - 8

*α2* = -2·2 - 2·3 - 2·5 + 2·2 + 2·3 + 3·5 = 11

*α3* = - (-2·2·3 -2·2·5 - 2·3·5 + 2·3·5) = - 32

*α4* = -2·2·3·5 = -60 .

Таким образом *f(x)* = *х4 – 8х3 + 11х2 - 32х – 60 .*

**2.4 Границы действительных корней**

При решении различных проблем математики, физики, механики и техники часто приходится делать те или иные заключения о расположении корней многочлена (уравнения) с числовыми коэффициентами, не зная его корней. При этом нередко существенную роль играют методы нахождения границ действительных корней многочлена с действительными коэффициентами и методы отделения отдельных корней, то есть способы нахождения таких интервалов, в которых лежит один и только один действительный корень данного многочлена (уравнения).

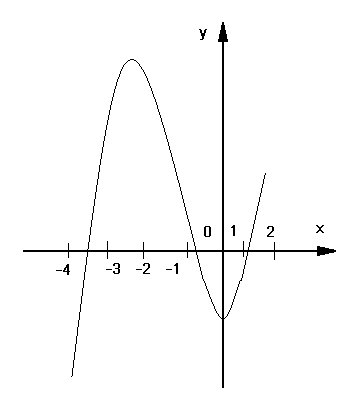
Исследование действительных корней многочлена *h(x)* с действительными коэффициентами удобнее начинать с рассмотрения графика этого многочлена: действительными корнями многочлена будут, очевидно абсциссы точек пересечения его графика с осью х и только они.

Рассмотрим многочлен пятой степени:

*h(x) = x5 + 2x4 – 5x3 + 8x2 – 7x – 3.*

О корнях этого многочлена можно утверждать следующее: степень многочлена *f(x)* нечётная, следовательно многочлен обладает хотя бы одним действительным корнем; если же число действительных корней больше единицы, то оно равно трём или пяти, так как комплексные корни попарно сопряжены.

Рассмотрение графика многочлена *h(x)* позволяет сказать больше о его корнях. Рассмотрим этот график (рис. 2). Возьмём лишь целые значения *х* и вычислим соответствующие значения *h(x)*.

 Рис 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | … |
| *h(x)* | … | -39 | 144 | 83 | 18 | -3 | -4 | 39 | … |

Мы видим, что многочлен *h(x)* имеет, по крайней мере три действительных корня – положительный корень α1 и два отрицательных корня α2 и α3 , причём

1 < α1< 2 , -1 < α2 < 0 , -4 < α3 < -3 .

Информация о действительных корнях многочлена, получающаяся от рассмотрения графика, практически обычно оказывается весьма удовлетворительной, но всякий раз остаются сомнения, действительно ли найдены все корни. Так в рассмотренном примере мы показали, что правее точки *х = 2* и левее *х = -4* уже нет корней многочлена. Более того, так как мы брали лишь целочисленные значения *х* , то можно допустить, что построенный нами график не вполне точно отражает истинное поведение функции *h(x)* , не учитывается, может быть , её более мелких колебаний и поэтому упускает некоторые корни.

Можно было бы при построении графика брать не только целочисленные значения *х* , а значения с точность до 0,1 или 0,01. Но тогда сразу чрезвычайно усложнится вычисление значений *h(x)*, в то время как отмеченные выше сомнения отнюдь не были ликвидированы. Отсюда вытекает потребность в более совершенных методах для разыскания границ, между которыми расположены действительные корни многочлена с действительными коэффициентами, и для определения числа этих корней.

Доказательство леммы о модуле старшего члена нам уже даёт некоторую границу для модулей корней многочлена. Действительно, получаем, что при

(1)

где *a*0 – старший коэффициент, А – максимум модулей остальных коэффициентов. Модуль старшего члена многочлена больше модуля суммы всех остальных членов, и потому никакое значение *х*, удовлетворяющее неравенству (1), не может служить корнем этого многочлена.

Таким образом, для многочлена *f(x)* c любыми числовыми коэффициентами число служит верхней границей для модулей всех его корней, как комплексных, так и действительных. Для рассмотренного выше многочлена *h(x)* этой границей, ввиду *a*0 = 1, А = 8, служит число 9.

Эта граница, однако, обычно оказывается слишком высокой, особенно если интересуются лишь границами действительных корней.

Покажем, что достаточно уметь находить лишь только верхнюю границу положительных корней любого многочлена.

Пусть нам дан многочлен *f(x)* степени *n* и пусть *N0* будет верхней границей его положительных корней. Рассмотрим многочлены

*φ1(x) = xn f* ,

*φ2(x) = f* ,

*φ3(x) = xn f*

b найдём верхние границы их положительных корней; пусть это будут соответственно числа *N1* , *N2* , *N3* . Тогда число будет нижней границей положительных корней многочлена *f(x)* : если α есть положительный корень многочлена *f(x)* , то будет положительным корнем для *φ1(x)* , и из *N1* следует α > *N1* . Соответственно числа – N2 и – , служат соответственно нижней и верхней границами отрицательных корней многочлена *f(x).* Итак все положительные корни многочлена *f(x)* удовлетворяют неравенствам

*х <N3 ,* все отрицательные корни – неравенствам - N2  *х < .*

Для определения верхней границы положительных корней можно применить следующий метод. Пусть дан многочлен

*f(x) = + a1xn-1 + … + an*

c действительными коэффициентами, причём *a0* > 0 . Пусть, далее, *aк , k ≥ 1* , будет первым из отрицательных коэффициентов; если бы таких коэффициентов не было, то многочлен *f(x)* вообще не мог бы иметь положительных корней. Также пусть *В* будет наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Тогда число 1 + служит верхней границей положительных корней многочлена *f(x)*. В самом деле, полагая *х > 1* и заменяя каждый из коэффициентов *a1, a2 , … , ak-1* числом нуль, а каждый из коэффициентов *ak , ak+1 ,… an –* числом– В, мы можем лишь уменьшить значение многочлена, т. е.:

*f(x) ≥ a0xn – B(xn-k + xn-k-1 + … +x +1) = a0xn - B* (ввиду *х > 1*)

*f(x) > a0xn - B* = *.* (2)

Если *х* > 1 + (3)

то, так как *a0xk-1(x-1) – B ≥ a0(x-1)- В ,*

выражение в квадратных скобках в формуле (2) окажется положительным, т.е., ввиду (2), значение *f(x)* будет строго положительным. Таким образом, значения *х*, удовлетворяющие неравенству (3), не могут служить корнями для *f(x)*, что и требовалось доказать.

Для рассмотренного выше многочлена *h(x)* этот метод даёт, ввиду k=2 и В=7, в качестве верхней границы положительных корней число 1 + , что можно заменить ближайшим целым числом 4.

Из многочисленных других методов разыскания верхней границы положительных корней изложим метод Ньютона.

Пусть дан многочлен *f(x)* с действительными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом *a0*. Если при *х* = с многочлен *f(x)* и все его последовательные производные *f ' (x), f ''(x), … , f n(x)* принимают положительные значения, то число *с* служит верхней границей положительных корней.

В самом деле, по формуле Тейлора

*f(x) = f(с) + (x - c)f '(c) + (x - c)2 …+(x –c)n .*

Мы видим, что если *х ≥ с* , то справа будет стоять строго положительное число, т.е. такие значения *х* не могут служить корнями для *f(x)*. Пи разыскании для данного многочлена *f(x)* соответствующего числа *с* полезно поступать следующим образом. Производная *f (n)(x) = n!a0* является положительным числом, поэтому многочлен *f (n-1)(x)* является возрастающей функцией *х*. Следовательно существует такое число *с1* , что при *х ≥ с1* производная *f (n-1)(x)* положительна. Отсюда следует, что при *х ≥ с1* производная *f (n-2)(x)* будет возрастающей функцией *х*, поэтому существует такое число *с2, с2 ≥ с1 ,* что при *х ≥ с2* производная *f (n-2)(x)* также будет положительной. Продолжая далее, мы дойдём до искомого числа *с*. Применим метод Ньютона к рассматривавшемуся выше многочлену *h(x),* имеем:

*h(x) = х5 + 2х4 – 5х3 + 8х2 – 7х – 3,*

*h '(x) = 5х4 + 8х3 - 15х2 + 16х – 7,*

*h ''(x) = 20х3 + 24х2 - 30х + 16,*

*h '''(x) = 60х2 + 48х – 30,*

*h ''''(x) = 120х +48,*

*h '''''(x) = 120*

Можно проверить (хотя бы методом Горнера), что все эти многочлены положительны при *х =* 2. Таким образом, число 2 служит верхней границей положительных корней многочлена *h(x)* – результат, много более точный, чем полученные выше другими методами.

Для разыскания нижней границы отрицательных корней многочлена *h(x)* рассмотрим многочлен *φ2(x)* = *- h(-x)I,* Так как

*φ2(x) = х5 - 2х4 – 5х3 - 8х2 – 7х + 3,*

*φ2 '(x) = 5х4 - 8х3 - 15х2 - 16х – 7,*

*φ2''(x) = 20х3 - 24х2 - 30х - 16,*

*φ2 '''(x) = 60х2 - 48х – 30,*

*φ2 ''''(x) = 120х - 48,*

*φ2 '''''(x) = 120*

а все эти многочлены положительны, это можно проверить, при *х =* 4, то число 4 служит верхней границей положительных корней для *φ2(x),* и поэтому число – 4 будет нижней границей отрицательных корней для *h(x).*

Рассмотрим многочлены

*φ1(x) = - x5h = 3х5 + 7х4 – 8х3 + 5х2 – 2х - 1,*

*φ3(x) = - x5h = 3х5 - 7х4 – 8х3 - 5х2 – 2х + 1.*

Найдём для них, применяя метод Ньютона, в качестве верхних границ положительных корней соответственно числа 1 и 4, а поэтому нижней границей положительных корней многочлена *h(x)* служит число 1, верхней же границей отрицательных корней – число - 0,25.

Итак, положительные корни многочлена *h(x)* расположены между числами 1 и 2, отрицательные корни – между числами – 4 и – 0,25. Такой результат хорошо согласуется с тем, что было найдено выше при рассмотрении графика.

**2.5 Теорема Штурма**

Рассмотрим вопрос о числе действительных корней многочлена *f(x)* с действительными коэффициентами, при этом будем интересоваться как общим числом действительных корней, так и отдельно числом положительных и числом отрицательных корней и вообще числом корней, заключенных между заданными границами *a* и *b*. Существует несколько методов для разыскания точного числа корней, причём все они весьма громоздки; среди них более удобным является метод Штурма.

Для начала введём одно определение, которое будем использовать в дальнейшем. Пусть дана некоторая упорядоченная конечная система действительных чисел, отличных от нуля, например:

1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1. (1)

Выпишем последовательно знаки этих чисел:

+ , + , - , + , - , - , - , + , + . (2)

Мы видим, что в системе знаков (2) четыре раза стоят рядом противоположные знаки. Ввиду этого говорят, что в упорядоченной системе (1) имеют место четыре перемены знаков. Число перемен знаков можно подсчитать, естественно, для любой упорядоченной конечной системы отличных от нуля действительных чисел. Рассмотрим сейчас многочлен f(x) с действительными коэффициентами, причем будем предполагать, что многочлен f(x) не имеет кратных корней, так как иначе мы могли бы его разделить на наибольший общий делитель с его производной. Конечная упорядоченная система отличных от нуля многочленов с действительными коэффициентами:

f(x) = *f0(x), f1(x), f2(x), … , fs(x)*  (3)

называют системой Штурма для многочлена *f(x)* , если выполняются следущие требования:

1. Соседние многочлены системы (3) не имеют общих корней.
2. Последний многочлен, *fs(x)* , не имеет действительных корней.
3. Если α – действительный корень одного из промежуточных многочленов *fk(x)* системы (3) , 1 ≤ k ≤ s – 1, то *fk-1(α)* и *fk+1(α)* имеют разные знаки.
4. Если α – действительный корень многочлена f(x), то произведение f(x) *f1(x)* меняет знак с минуса на плюс, когда *x,* возрастая, проходит через точку α.

Вопрос о том, всякий ли многочлен обладает системой Штурма, рассмотрим ниже; сейчас же, полагая, что *f(x)* такой системой обладает, покажем, как она может быть использована для нахождения числа действительных корней.

Если действительное число *с* не является корнем данного многочлена *f(x),* а (3) – система Штурма для данного многочлена, то возмём систему действительных чисел

f(c), f1(c), f2(c), … , fs(c),

вычеркнем из неё все числа, равные нулю, и обозначим через *W(c)* число перемен знаков в оставшейся системе; будем называть *W(c)* числом перемен знаков в системе Штурма (3), при *х = с.*

Справедлива следующая теорема Штурма:

Если действительные числа *a* и *b*, *a* < *b*, не являются корнями многочлена f(x), не имеющего кратных корней, то W(*a*) ≥ W(*b*) и разность W(*a*) – W(*b*) равна числу действительных корней многочлена f(x), заключенных между *a* и *b.*

Таким образом, для определения числа действительных корней многочлена *f(x)*, заключенного между *a* и *b* (мы помним, что *f(x)* по условию не имеет кратных корней), нужно лишь установить, насколько уменьшается число перемен знаков в системе Штурма этого многочлена при переходе от *a* к *b*. Доказывая теорему, рассмотрим, как меняется число W(*x*) при возрастании *x*. Пока *x*, возрастая, не встретит корня ни одного из многочленов системы Штурма (3), знаки многочленов этой системы не будут меняться, и поэтому число W(*x*) остается без изменения. Ввиду этого, а также ввиду условия (2) из определения теоремы Штурма, нам остается рассмотреть два случая: переход *x* через корень одного из промежуточных многочленов *fk(x)*, 1 ≤ k ≤ s – 1, и переход *x* через самого многочлена *f(x).*

Пусть α будет корнем многочлена *fk(x)*, 1 ≤ k ≤ s – 1. Тогда, по условию (1), *fk-1(α)* и *fk+1(α)* отличны от нуля. Можно найти, таким образом, такое положительное число ε, быть может и очень малое, что в отрезке (α – ε, α + ε) многочлены *fk-1(x)* и *fk+1(x)* не имеют корней и поэтому сохраняют постоянные знаки, причём, по условию (3), эти знаки различны. Следовательно, каждая из систем чисел:

fk-1(α – ε), fk(α – ε) , fk+1(α – ε) (4)

и fk-1(α + ε), fk(α + ε) , fk+1(α + ε) (5)

обладают ровно одной переменой знаков независимо от того, каковы знаки чисел fk(α + ε) и fk(α – ε). Так, например, если многочлен *fk-1(x)* на рассматриваемом отрезке отрицателен, а *fk+1(x)* положителен и если fk(α – ε)>0, fk(α + ε)<0, то системам (4) и (5) соответствуют системы знаков:

- , + , + , - , - , +

Таким образом, при переходе *x* через корень одного из промежуточных многочленов системы Штурма перемены знаков в этой системе могут лишь перемещаться, но не возникают вновь и не исчезают, а поэтому число *W(x)* при таком переходе не меняется.

Пусть, с другой стороны, α будет корнем самого данного многочлена *f(x).* По условию (1) α не будет не будет корнем для f1(*x*). Следовательно существует такое положительное число ε, что отрезок (α – ε, α + ε) не содержит корней многочлена *f1(x),* а поэтому *f1(x)* сохраняет на этом отрезке постоянный знак. Если этот знак положителен, то , исходя из условия (4) сам многочлен *f1(x)* при переходе *x* через α меняет знак с минуса на плюс, т. е. f(α – ε)<0, f(α + ε)>0. Система чисел:

f(α – ε), f1(α – ε) и f(α + ε), f1(α + ε) (6)

соответствует системе знаков:

- , + и + , +,

т.е. в системе Штурма теряется одна перемена. Если же знак *f1(x)* на отрезке (α – ε, α + ε) отрицателен, то опять, ввиду условия (4), многочлен *f(x)* меняет знак с плюса на минус при переходе *x* через α, т.е. f(α – ε)>0, f(α + ε)<0; системам чисел (6) соответствуют теперь системы знаков:

+ , - и - , -,

т.е. в системе Штурма снова теряется одна перемена.

Таким образом, число W(x) меняется (при возрастании х) лишь при переходе х через корень многочлена f(x), причём при этом оно уменьшается ровно на единицу.

Таким образом, следовательно, теорема Штурма доказана.

Для того чтобы воспользоваться теоремой Штурма для разыскания общего числа действительных корней многочлена *f(x)*, достаточно в качестве *a* взять нижний предел отрицательных корней, в качестве *b* – верхний предел положительных корней. Однако проще поступить следующим образом: существует такое положительное N, быть может и очень большое, что при >N знаки всех многочленов системы Штурма будут совпадать со знаками их старших членов. Словом, существует столь большое положительное значение неизвестного *x*, что знаки соответствующих ему значений всех многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов; это значение *x*, которое и вычислять нет необходимости, условно обозначается символом ∞. Существует, с другой стороны, столь большое по абсолютной величине отрицательное значение *x*, что знаки соответствующих ему значений многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов для многочленов четной степени и противоположны знакам старших коэффициентов для многочленов нечётной степени; это значение *x* будем условно обозначать через -∞. В отрезке (-∞,∞) содержатся все действительные корни всех многочленов системы Штурма и, в частности, все действительные корни многочлена *f(x)*. Применяя к этому отрезку теорему Штурма, мы найдём число этих корней, применение же теоремы Штурма к отрезкам (-∞,0) и (0,∞) дает соответственно число отрицательных и число положительных корней многочлена *f(x)*. Покажем ещё, что всякий многочлен *f(x)* с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, обладает системой Штурма. Из различных методов, используемых для построения такой системы, изложим один, наиболее употребительный. Положим *f(x)* = *f '(x)*, чем обеспечивается выполнение условия (4) из определения системы Штурма.

В самом деле, если α – действительный корень многочлена *f(x)*, то *f '(a)*≠0. Если *f '(a)*>0, то *f '(x)*>0 в окрестности точки α, а поэтому *f(x)* меняет знак с минуса на плюс при переходе *x* через α; это же верно тогда и для произведения *f(x)* *f1(x)*. Аналогичные рассуждения проходят и в случае *f '(a)*<0. Делим затем *f(x)* на *f1(x)* и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за *f2(x)*:

*f(x)* = *f1(x)q1(x)-* *f2(x)*.

Вообще, если многочлены *fk-1(x)* и *fk(x)* уже найдены, то *fk+1(x)* будет остатком от деления *fk-1(α)* на *fk(x),* взятым с обратным знаком:

*fk-1(x)* = *fk(x)qk(x) -* *fk+1(x)*. (7)

Изложенный здесь метод отличается от алгоритма Евклида, применяемого к многочленам *f(x)* и *f'(x),* лишь тем, что у остатка каждый раз меняется знак на обратный и следующее деление производится уже на этот остаток с обратным знаком. Так как при разыскании наибольшего общего делителя такая перемена знаков не существенна, то процесс остановится на некотором *fs(x)*, являющемся наибольшим общим делителем многочленов *f(x)* и *f '(x)*, причём из отсутствия у *f(x)* кратных корней, т.е. из его взаимной простоты с *f '(x)*, будет следовать, что на самом деле *fs(x)* является некоторым, отличным от нуля, действительным числом. Следовательно, построенная нами система многочленов:

*f(x)= f0(x), f'(x)= f1(x), f2(x), … , fs(x),*

удовлетворяют и условию (2) из определения системы Штурма. Чтобы доказать выполнение условия (1), предроложим, что соседние многочлены *fk(x)* и *fk+1(x)* обладают общим крнем α. Тогда, по условию (7), *a* будет корнем и для многочлена *fk-2(x)*. Перейдя к равенству:

*fk-2(x)* = *fk-1(x)qk-1(x) -* *fk(x)*,

получим, что α служит корнем и для *fk-2(x)*. Продолжая далее, получим, что α служит общим корнем для *f(x)* и *f '(x)*, что, однако, противоречит нашим предположениям. Наконец, выполнение условия (3) вытекает непосредственно из равенства (7): если *fk(α)=0,* то *fk-1(α)= - fk+1(α).*

**2.6 Приближенное вычисление корней многочлена**

Действительные корни любого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами могут быть найдены с любой точностью путём вычисления значений многочлена в отдельных точках. Покажем это на примере. Многочлен

*f(x)* = *х4 +х2 + 4х +1*

имеет корень в интервале (1;2). Обозначим этот корень через *х0* . вычисляя значения *f(x)* в точках 1,1 ; 1,2 ; … 1,9 , мы обнаружим, что

*f(1,2)* < 0 , *f(1,3)>0 ,*

следовательно *х0* лежит в интервале (1,2 ; 1,3). Вычисляя значения *f(x)* в точках 1,21 , 1,22 , … 1,29 , находим , что

*f(1,24)* < 0 , *f(1,25)> 0 .*

следовательно, *х0* лежит в интервале (1,24 ; 1,25) .

Таким образом мы можем найти любое количество десятичных знаков искомого корня *х0* , т. е. вычислить его с любой наперёд заданной точностью.

Описанный выше «табличный» метод решения уравнений требует больших вычислений. Существуют гораздо более совершенные методы: метод Ньютона, метод итераций, метод Лагранжа, метод Лобачевского и др.

Эти методы изложены в статье А. Д. Доморода в книге «Энциклопедия элементарной математики» т. 2.

**2.6.1. Метод линейной интерполяции**

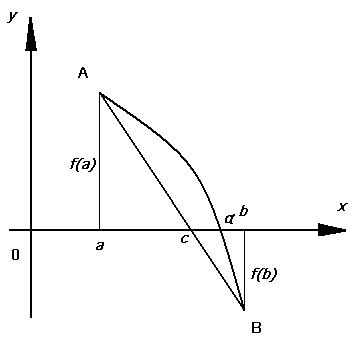
Данный метод иногда называют методом *ложного положения*. В качестве приближенного значения корня можно принять полусумму границ *a* и *b*  , т.е. середину отрезка, концы которого и есть точки . Вполне естественно предположить, что корень лежит ближе к той из границ , которой соответствует меньшее по абсолютной величине значение многочлена. Метод линейной интерполяции состоит в том, что в качестве приближенного значения корня **α** берётся число с, которое делит отрезок (a, b) на части, пропорциональные абсолютным величинам чисел *f(a) f(b)*:

;

Знак минус в правой части поставлен потому, что *f(a)* и  *f(b)* имеют разные знаки. Преобразуя, получим:

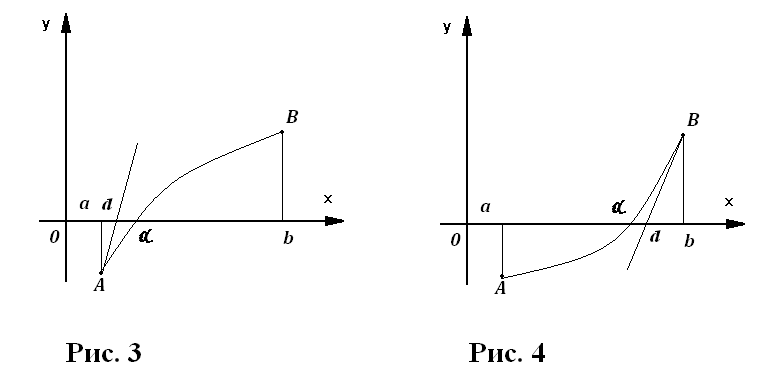
(1)

Как видно из рисунка 2, геометрически метод линейной интерполяции заключается в том, что на отрезке () кривая *y=f(x)* заменяется её хордой (отсюда ещё одно название данного метода – *метод хорд*), соединяющий точки *A(a,f(a))* и *B(b,f(b))*. В качестве приближенного значения корня **α** принимается абсцисса точки пересечения этой хорды с осью *х.*

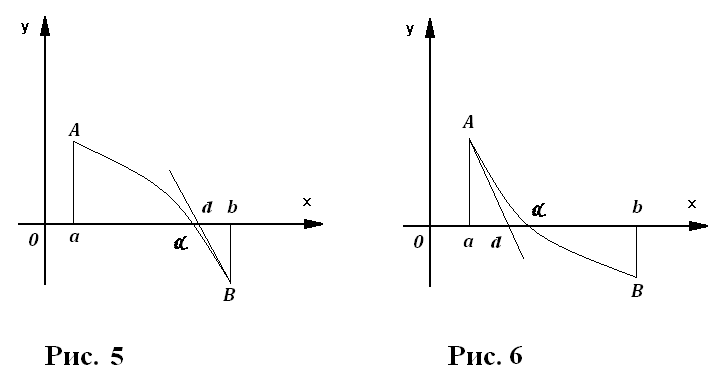
 Рис 2.

**2.6.2. Метод Ньютона**

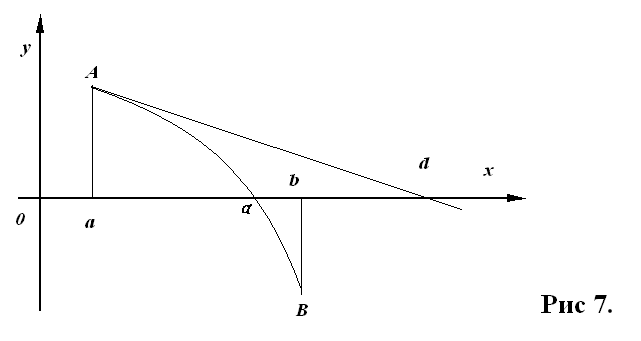
Мы имеем α – простой корень многочлена *f(x), тогда f '(α)≠0*. Примем также, что и *f  ''(α)≠0,* в противном случаевопрос сводится к вычислению корня многочлена *f''(x)*, имеющего меньшую степень, чем *f(x)*. Примем также, что отрезок (*a, b*) не содержит корней *f(x),* отличных отα, но и не содержит ни корня многочлена *f '(x),*а также и корня многочлена *f ''(x).* В таком случае функция *y = f(x)* на отрезке (a, b) либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, а также во всех точках этого промежутка выпукла вверх или выпукла вниз. В расположенной прямой могут встретится четыре случая, представленных на рис 3-8. Обозначим через *а0* тот из пределов *a* и *b,* в котором знак *f(x)* совпадают со знаком *f ''(x).* Так как *f(a)* и *f(b)* имеют разные знаки, а *f ''(x)* сохраняет знак на всем отрезке (*a, b*), то такое *a0* может было указано. В случаях, представленных на рис. 3 и 4,



будет *a0 = a*, в двух других случаях *a0 = b*. В точке кривой *y = f(x)* с абсциссой *a0 ,* т.е. в точке с координатами *(a0 , f(a0)),* проведём касательную к этой кривой и обозначим через *d* абсциссу точки пересечения этой касательной с осью *х*. Рисунки 3-6 показывают, что число *d* можно считать приближенным значением корня α.



Метод Ньютона состоит, следовательно, в замене кривой *y = f(x)* на отрезке *(a, b)* её касательной в одной из границ этого отрезка. Условие, наложенное на выбор точки *a0* , очень существенно: рис. 7 показывает, что без соблюдения этого условия точка пересечения касательной с осью *х* может совсем не давать приближения к искомому корню.



Выведем формулу, по которой разыскивается число *d*. Как известно, уравнение касательной к кривой *y = f(x)* в точке *(a0, f(a0))* может быть записано в виде:

*y – f(a0) = f '(a0)(x - a0).*

Подставляем сюда координаты *(d, 0)* точки пересечения касательной с осью *х,* получим:

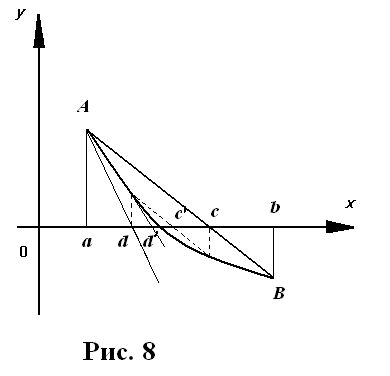
*-f(a0) = f '(a0)(d - a0),*

откуда:

d = . (2)

Если соединить на рис. 3-6 точками *А* и *В* хордами, то обнаружится, что методы линейной интерполяции и Ньютона во всех случаях дают приближение к истинному значению с разных сторон. Целесообразно поэтому, если отрезок *(a, b)* уже такой, как это требуется в методе Ньютона, комбинировать два эти метода. Мы получим этим путем много более тесные границы *c* и *d* для корня α.

Если они ещё не дают требуемой точности приближения, то к этим пределам следует применить ещё раз указанные оба метода (см. рис. 8) и т. д., до тех пор пока не вычислим корень α с любой, наперёд заданной, точностью.



**2.7 Частные методы решения уравнений высших степеней**

Уравнения выше пятой степени в общем случае неразрешимы в радикалах, а формулы Кардано и Феррари для уравнений третьей и четвертой степеней в школе не проходят, в учебниках по алгебре, на дополнительных вступительных испытаниях в некоторые ВУЗы, , а также в олимпиадных заданиях иногда встречаются задачи, где требуется решить уравнения выше второй степени. Обычно их специально подбирают так, чтобы корни уравнений можно было найти с помощью некоторых элементарных приемов. Расскажем о некоторых таких приёмах.

**Теорема о рациональных корнях.** Для того, чтобы несократимая дробь (q ≠ 0) была корнем уравнения:

*a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an = 0,* где *a0* ≠ 0

с целыми коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы число *p* было делителем свободного члена *an*, а число q – делителем старшего коэффициента *a0.*

**Следствие.** Если уравнение:

*a0 x n + a1 x n-1 + … + an-1 x +an = 0*

имеет целые коэффициенты, а старший коэффициент равен единице (*a0 = 0*), то рациональными корнями этого уравнения могут быть только целые числа, которые являются делителями свободного коэффициента *an* .

**Теорема Безу.** При делении многочлена n-й степени относительно *x* на двучлен (*x – a)* остаток равен значению делимого при *x = a.*

**Следствие.** Если число *a* является корнем многочлена *f(x)*, то этот многочлен делится на (*x – a)* без остатка.

**Метод понижения степени уравнения. Деление в «столбик»**

Если левую часть алгебраического уравнения с целыми коэффициентами можно разложить на множители, то решение уравнения сводится к решению совокупности уравнений меньших степеней. Метод понижения степени уравнения основывается на использовании теоремы Безу. Решая уравнение с помощью теоремы Безу, необходимо:

* найти все целые делители свободного члена;
* выбрать из этих делителей хотя бы один корень уравнения (*a*);
* левую часть уравнения разделить на (*x – a),* при этом деление многочлена на многочлен можно проводить «столбиком»;
* записать в левой части уравнения произведение делителя и частного;
* решить полученное уравнение.

При делении многочлена *Pn(x)* на многочлен *Qm(x)* «столбиком» многочлены располагаются по убывающим степеням *x.* Затем старший член многочлена *Pn(x)* делят на старший член многочлена *Qm(x)* и получают старший член частного – многочлена *S(x).* Найденный старший член многочлена *S(x)* умножают затем на делитель – многочлен *Qm(x)*, и полученный многочлен вычитают из многочлена *Pn(x).* В результате вычитания получается некоторый многочлен *D1(x)*, степень которого меньше *n*. Описанную процедуру повторяют несколько раз. Процесс продолжают до тех пор, пока степень полученного на *k*- омшаге многочлена *D1(x)* станет меньше степени многочлена *Qm(x)*, т.е. многочлен *D1(x)* – будет остаток.

**Схема Горнера**

Схема Горнера – это алгоритм деления многочленов, когда частное равно двучлену (*x – a)*.

Обозначим неполное частное при делении многочлена:

*P(x) = a0 x n + a1 x n-1 + … +an*

на (*x – a)* через *Q(x) = b0 x n-1 + b1 x n-2 + … + bn-1 ,* а остаток– через *bn*. Так как:

*P(x) = Q(x)(x - a) + bn ,*

То имеет место тождество:

*a0 x n + a1 x n-1 + … +an = (b0 x n-1 + b1 x n-2 + … + bn-1)(x - a) + bn* .

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях *x* слева и справа. Получим, что *a0 = b0* и при *1* ≤ *k* ≤ *n* имеют часто соотношения *ak = bk - a·bk-1*. Следовательно, можно говорить, что *b0 = a0* и *bk = ak + a · bk-1* при *1* ≤ *k* ≤ *n.*

Вычисления коэффициентов многочлена *Q(x)* и остатка *bn* записывают в виде следующей таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *а* | *an* | *an-1* | *…* | *a1* | *a0* |
| *bn-1* | *bn-2 = abn-1 + an-1* | *…* | *b0 = ab1 + a1* | *R = ab0 + a0* |

Данная таблица называется схемой Горнера.

В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты многочлена *P(x)*. Во второй строке получаются коэффициенты частного и остаток.

**Решение уравнений введением новой переменной**

Суть этого метода состоит в следующем. Пусть требуется решить уравнение *g(φ(x)) = 0*. Заменим *φ(x) = t.* Тогда *g(t) = 0*. Пусть последнее уравнение имеет корни t1 , t2, …, tn. Тогда уравнение *g(φ(x)) = 0* равносильно совокупности уравнений:

*φ(x) = t1,*

*φ(x) = t2,*

*…,*

*φ(x) = tn*

Множество решений этой совокупности и есть множество решений исходного уравнения.

Уравнение вида *ax2n + bxn + c = 0,* где *a ≠ 0, n ≥ 2* называется трёхчленным. При  *n = 2* трёхчленное уравнение называется биквадратным. Трёхчленное уравнение решается методом введения новой переменной: положив *y = xn,* придём к квадратному уравнению *ay2 + by + c = 0* , с последующим решением двух двухчленных уравнений: *x2 = y1* и *x2 = y2 (y1* и *y2* – корни соответствующего квадратного уравнения).

Если *y1* ≥ 0 и *y2* ≥ 0, то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня:

*x1,2 = ± , x3,4 = ± .*

Если y1 ≥ 0, y2 < 0 то биквадратное уравнение имеет два действительных корня *x1,2 =*  и два мнимых сопряженных корня *x3,4 = .*

Если y1 < 0 и y2 < 0, то биквадратное уравнение имеет четыре мнимых, попарно сопряженных корня: *x1,2 = . x3,4 = .*

Уравнения вида (*x - a*)*n* + (*x - b*)*n = k* и к ним сводящиеся решаются при помощи замены .

Порой бывает удобным решать уравнения относительно коэффициентов, то есть принимая коэффициент за неизвестный параметр.

**Решение уравнений с помощью группировки и формул сокращенного умножения**

Левая часть уравнения *P(x) = 0* может быть разложена на множители способом группировки и с помощью формул сокращенного умножения.

Уравнения вида:

(*x2 + ax + b*)( *x2 + ax + d*) = *f*

Можно решить с помощью выделения квадрата двучлена. Уравнение представляется в виде:

(*x2 + ax + b*)(( *x2 + ax + b*) *+d - b*) = *f*

можно решить с помощью выделения квадрата двучлена. Уравнение представляется в виде:

(*x2 + ax + b*)((*x2 + ax + b*) *+ d - b*) = *f* ;

(*x2 + ax + b*)2 + (*d + b)*(*x2 + ax + b*) – *f =* 0.

Принимая *(x2 + ax + b) = y*, получим квадратное уравнение относительно *y.* После отыскания его корней, мы приравниваем их к (*x2 + ax + b*) и получаем два простейших квадратных уравнения.

При решении уравнений четных степеней часто удобно пользоваться формулой:

(*a2 – b2*) = (*a - b*)( *a + b*).

**Метод неопределённых коэффициентов**

Если у многочлена с целыми коэффициентами рациональных корней не оказалось, можно попробовать разложить его на множители меньшей степени с целыми коэффициентами.

*a0 x n + a1 x n-1 +…+an = (k0 x n-s + k1 x n-s-1 + … + kn-s )(t0 xn+s + t1xn+s-1 + …+tn+s )*

Раскрыв скобки в правой части, приведя подобные члены и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в обеих частях, получим системы уравнений относительно *k0, …, kn-s , t0 , …, tn-s .* Повторяя эту процедуру необходимое число раз, мы получим уравнения, степень которых будет ниже, чем исходное.

**Симметрические уравнения**

Уравнение *a0 x n + a1 x n-1 +…+an =* 0 называют симметрическим, если в нем коэффициенты равноудалённые от концов совпадают, т.е. *a0 = an , a1  = an-1 , …* Различают симметрические уравнения четной степени и симметрические уравнения нечетной степени. Симметрическое уравнение четной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени делением на и последующей заменой *y = x ±* . Любое симметрическое уравнение нечетной степени сводится к квадратному уравнению четной степени, т.к. у любого симметрического уравнения нечетной степени один из корней всегда равен -1.

**Возвратные уравнения и способы их решения**

Уравнения вида

*a0 x 2n + a1 x 2n-1 +…+ anxn + λan-1 x n-1 + λ2an-2 x n-2 +…+ λna0 =* 0,

*a0 x 2n+1 + a1 x 2n +…+ anxn+1 + λan x n +λ3an-1 x n-1 +…+ λ2n+1a0 =* 0, (5)

где *a0* ≠ 0 и λ – некоторое число, отличное от нуля, называется возвратными алгебраическими уравнениями. При λ = 1 возвратные уравнения являются симметрическими. Так уравнение:

2*x2* + 6*x4 –* 2*x30 +* 4*x2* – 48*x2* – 64 = 0 является возвратным с λ = 2.

Возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень *x = -* λ

Каждое выражение в скобках левой части этого уравнения обращается в ноль. Выделив в левой части этого уравнения (5) множитель (*x +* λ), получаем, что уравнение (5) эквивалентно совокупности, состоящей из уравнения *x =* - λ и возвратного уравнения четной степени.

**Способ симметризации уравнений.**

Уравнение вида *(x – a)(x – b)(x – c)(x – d) = k*, где *a+ b = c + d* эффективно решать перемножением *(x – a)(x – b) и (x – c)(x – d),* а затем делать замену. Так же эти уравнения можно решать, используя симметризацию уравнений (замену переменной) при условии, что *b – a = d – c*:

*y = = x – .*

**Решение однородных уравнений**

Уравнение вида

*a0pn(x) + a1pn-1(x) q(x) + … + an-1p(x)qn-1(x) + anqn(x) = 0*,

где *n* > 1, *a0* ≠ 0, *an* ≠ 0, *p(x)* и *q(x)* - некоторые функции, называется однородным уравнением.

Решение такого уравнения сводится к решению совокупности, состоящей из системы:

И уравнений

*p(x) = y1q(x), p(x) = y2q(x), …, p(x)= yk q(x)*,

где *y1, …, yk* все корни уравнения:

*a0yn + a1yn-1 + … +an-1y + an = 0.*

**Решение уравнений с помощью тригонометрических подстановок**

Тригонометрическая подстановка является одним из способов реализации метода замены переменной и используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значения тригонометрической функции или включается в эту область. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, которое требуется упростить.

**Глава III. Решение задач и методические рекомендации**

**3.1 Решение задач**

**Задача 1.** Решить уравнение:

*х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30=0

Делителями свободного члена являются ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ± 30. По следствию теоремы о корнях они могут быть корнями данного уравнения. Подставляя эти числа в уравнение, находим, что левая часть уравнения обращается в нуль лишь при х=2:

*P*(2) = 24 + 3 ∙ 23 – 13 ∙ 22  - 9 ∙ 2 + 30 = 0

Следовательно, *х* – 2 - корень данного уравнения. Тогда по следствию 2 теоремы Безу многочлен *х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30 делится на (*х* – 2) без остатка. Делим столбиком многочлен *х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30 на (*х* – 2):

|  |  |
| --- | --- |
| *х*4 + 3*х*2 -13*х*2 -9*х*+30 | *х* - 2 |
| *х*4 - 2*х*3 | *х*3+5*х*2-3*х*-15 |
| 5*х*3 -13*х* 2 -9*х*+30  5*х*3 - 10*х*2 |  |
| -3*х*2 - 9*х*+30  -3*х*2 +6*х* |  |
| -15*х*+30  -15*х*+30 |  |
| 0 |  |

Таким образом,

*х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30 = (*х*3+5*х*2-3*х*-15)(*х*-2)

Рассмотрим многочлен *х*3+5*х*2-3*х*-15. Делителями свободного члена является ±1, ±3, ±5, ±15.Очевидно, корень *х* = -5 – корень уравнения *х*3+5*х*2-3*х*-15=0. Деля далее многочлен *х*3+5*х*2-3*х*-15 на (*х*+5), получим:

*х*3+5*х*2-3*х*-15 = (*х*2-3)(*х*+5).

Тогда

*х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30 = (*х*2-3)(*х*+5)(*х*-2).

Квадратное уравнение *х*2-3 = 0 имеет корни *х* = -√3 и *х* = √3.

Отсюда

*х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30=(*х*+5)(*х*+√3)(*х*-√3)(*х*-2).

Следовательно, уравнение *х*4 +3*х*3-13*х*2-9*х*+30=0 имеет корни *х*1= -5, *х*2 = -√3, *х*3 = √3, *х*4 = 2.

*Ответ:* -5, -√3, √3, 2.

**Задача 2.** Решить уравнение:

*x4* – 10 *x3* + 35*x2* – 50*x* + 24 = 0 .

Рассмотрим алгоритм применения схемы Горнера для данного уравнения. Определим коэффициенты перед переменным и свободный член уравнения , впишем их в таблицу, начиная с коэффициента многочлена наибольшей степени.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *а n* | 1 | -10 | 35 | -50 | 24 |
| *b n* |  |  |  |  |  |

Корнями уравнения могут являться делители свободного члена уравнения, то есть числа ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ±6; ±8; ± 12; ±24. Запишем одно из них в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*=1 | *аn*= 1 | *an-1* = - 10 | 35 | -50 | 24 |
| *bn-1= an* =1 | *bn-2* =1·1 + (-10) = -9 | *b n-3* = 1· (-9) + 35 = 26 | *b n-4* = 1· 26 + (-50) = -24 | *bn-5*= 1· (-24) + 24 = 0 |

Если в последнем столбце таблицы получаем 0, то данное число ( в нашем примере *х = 1)*  является корнем уравнения. Итак,

*х*4 - 10*х*3 + 35*х*2 - 50*х* + 24 =( *х*3- 9*х*2 + 26*х* - 24 )( *х*-1 ) .

Проверим остальные предполагаемые числа для полученного уравнения третьей степени *х*3 – 9*х*2 + 26*х* – 24 = 0.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -10 | 35 | -50 | 24 | Выводы |
| *х*=1 | 1 | -9 | 26 | -24 | 0 | 1 – корень |
| *х=*1 | 1 | -8 | 18 | -6≠0 |  | 1 – простой корень |
| *х*=2 | 1 | -7 | 12 | 0 |  | 2 - корень |
| *х*=2 | 1 | -6 | 6≠0 |  |  | 2 – простой корень |

Отсюда *х*4 – 10*х*3 + 35*х*2 - 50*х* + 24 = (*х*2 – 7*х* + 12)(*х* - 1)(*х* - 2)

Решим полученное квадратное уравнение:

*x*2 – 7*х* + 12= 0 .

Для нахождения корней воспользуемся теоремой Виета:

Решая систему, находим

= 3, =4.

Данное уравнение имеет корни: = 1; = 2; = 3; = 4 .

*Ответ:* 1; 2; 3; 4.

**Задача 3.** Решить уравнение:

y3 + 3y2 - 3y – 14 = 0

Решим данное уравнение третьей степени, используя формулы Кардано.

Подстановка *y = x*-1 приводит к виду:

*х*3 - 6*х* - 9 = 0 (1) (*р* = - 6, *q* = - 9)

D =+=> 0.

Т.е. уравнение (1) имеет один действительный и два комплексных корня.

α = = ; β = =

α1 = 2, β1 = 1, т.е. *х*1 = α1 + β1 = 3

Находим два других корня:

*х*2= - + i; *х*3= - - i

Отсюда следует, что корнями исходного уравнения служат числа:

*y*1 = 2; *у*2 = - +i; *y*3 =- - i.

**Задача 4.** Решить уравнение:

*x*4 + 4*x*3 - 4 *x*2 - 20 *x* - 5 = 0. (1)

Решим заданное (1) уравнения 4-ой степени методом Феррари.

*Решение.* Сделаем в уравнении замену:

*x* = *y* – 1 (2)

Поскольку

*x*4 + 4*x*3 - 4*x*2 - 20*x* – 5 = (*y* -1)4+ (*y* -1)3 – 4(*y* - 1)2 – 20(*y* - 1) - 5=

=*y*4- 4*y*3 + 6*y*2 – 4*y* + 4*y*3 – 12*y*2 + 12*y* – 4 – 4*y*2 + 8*y* – 4 – 20*y* + 20 – 5=

= *y*4 – 10*y*2 – 4*y* + 8,

То в результате замены (2) уравнение (1) принимает вид:

*y*4 - 10*y*2 – 4*y* + 8 = 0. (3)

Для коэффициентов уравнения (3) справедливы равенства:

*P* = -10, *q* = - 4, *r* = 8. (4)

Тогда кубической резольвентой для уравнения (3) служит уравнение:

2s3 + 10s2 – 16s – 84 = 0,

которое при сокращении на 2 принимает вид :

s3 + 5s2 – 8s – 42 = 0 (5)

Проверяя, какой из делителей свободного члена уравнения (5) является целым корнем этого уравнения, находим, что целым корнем кубической резольвенты является число

S = - 3. (6)

Подставляя значения (4) и (6) в формулу:

*y*2 - *y* - + s = 0,

Получаем уравнение

*y*2 + 2*y* – 2 = 0,

Корни которого имеют вид:

*y*1 = 1 - , *y*2 = 1 + . (7)

Подставляя значения (4) и (6) в формулу

*y*2 - *y* - + s = 0.

Получаем уравнение

*y*2 + 2*y* – 2 = 0,

Корни которого имеют вид:

*y*3 = -1 - , *y*4 = -1 + .

В завершение, воспользовавшись формулой (2), из (7) и (8) находим корни уравнения (1):

*x*1 = -, *x*2 = , *x*3 = - 2 - , *x*4 = - 2 +.

*Ответ*: -, , - 2 - , - 2 +.

**Задача 5.** Найти действительные корни уравнения (*х* + 3)4 + (*х* + 5)4 = 16.

Решим уравнение методом введения новой переменной.

Введем замену. Пусть у = *х* + 4, тогда

(у - 1)4 + (у + 1)4 = 16;

(у2 – 2у + 1)2 + (у2 + 2у + 1)2 = 16;

у4 + 4у2 + 1 – 4у3 + 2у2 – 4у + у4 + 4у2 + 1 + 4у3  +2у2 – 4у + 16;

2у4 + 12у2 + 2 = 16;

у4 + 6у2 – 7 = 0.

Получили биквадратное уравнение. Положим у2 = s:

s2 + 6s – 7 = 0.

Дискриминант этого уравнения равен D = 36 + 28 = 64 > 0. Значит, уравнение имеет два корня.

s1 = = -7

s2 = = 1.

Тогда у2 = 1 и у1 = - 1, у2 = - 1.

При у2 = - 7 уравнение действительных корней не имеет.

Вернемся к замене.

*х* + 4 = 1 или *х* + 4 = - 1

*х*1 = - 3 или *х*2 = - 5.

*Ответ: -3, -5.*

**Задача 6.** Найдите действительные корни уравнения 8x4 + x3 + 64x + 8 = 0

Решим уравнение c помощью метода группировки

Попробуем разложить на множители многочлен 8*x*4 + *x*3 + 64*x* + 8 c помощью группировки. Имеем

8*x*4 + *x*3 +64*x* +8 = (8*x*4 + *x*3) + (64*x* + 8) = *x*3 (8*x* + 1) + 8(8*x* + 1) =

= (8*x* + 1)(*x*3 + 8) = (8*x* + 1)(*x* + 2)(*x*2 – 2*x* + 4).

Получаем уравнение (8*x* + 1)(*x* + 2)(*x*2 – 2*x* + 4) = 0, которое

распадается на три уравнения

8*x* + 1 = 0; *x* = ,

*x* + 2=0; *x* = - 2,

*x*2 – 2*x* + 4 = 0 – корней нет.

*Ответ:* - , -2.

**Задача 7.**  Решить уравнение (*x*2 + *x* + 1)(*x*2 + *x* + 2) = 12.

При решении используем формулы сокращенного умножения.

Заметим, что выражения, стоящие в скобках отличаются на 1, тогда

уравнение можно переписать в виде:

(*x*2 + *x* +1)((*x*2 + *x* +1) + 1) = 12.

Выполним преобразования уравнения:

(*х*2 + *х* +1) + (*х*2 + *х* + 1) – 12 = 0.

Данное уравнение является квадратным относительно *x*: (*х*2 + *х* + 1). Сделаем замену *х*2 + *х* + 1 = у. Получим уравнение

у2 + у -12 = 0.

Корни полученного квадратного уравнения равны – 4 и 3. Приравняем выражение *х*2 + *х* + 1 к - 4 и 3. Получим простейшие квадратные уравнения:

*х*2 + *х* + 1 = - 4 и *х*2 + *х* + 1 = 3.

Уравнение: *х*2 + *х* + 5 = 0 корней не имеет. Корнями уравнения *х*2 + *х* – 2 = 0 являются числа - 2 и 1.

*Ответ*: -2, 1.

**Задача 8.** Найти действительные корни уравнения:*х4 \_* 2*х2 –* 8*х –* 3*=* 0.

Найдем действительные корни уравнения, используя метод неопределенных коэффициентов.

Представим левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

*х4 \_* 2*х2 –* 8*х –* 3*= (х2 + ах+ b)(х2 + px + q).*

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные:

*х4 \_* 2*х2 –* 8*х* – 3*= х4 + (a + p)x3 + (b + ap + q)x2 + (aq + bp)x + bq.*

Теперь, приравнивая коэффициенты при равных степенях *х* в обеих частях, получим систему уравнений

Решая систему, находим *а* = 2, *b* = - 2, *q* = - 1. Отсюда:

*х4* \_ 2*х2 –* 8*х –* 3*= (х2 +* 2*х+* 3*)(х2 -* 2*x -* 1*).*

Таким образом, для отыскания корней исходного уравнения, необходимо решить квадратные уравнения *х2 +* 2*х+* 3*=* 0 и *х2 -* 2*x –* 1*=* 0*.*

Уравнение *х2 +* 2*х+* 3*=* 0 действительных корней не имеет, так как его дискриминант отрицателен. Решением уравнения *х2 -* 2*x –* 1*=* 0 являются

*х*1 = 1 - , *х2 =* 1 + .

*Ответ: х*1 = 1 - , *х2 =* 1 + .

**Задача 9.** Решить уравнение: 2*х4 -* 9*х3 - х2 +* 2*х +*1 = 0*.*

У нас симметрическое уравнение четной степени. Поскольку *х =* 0 не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на *х2 ≠* 0:

2*х2 +* 9*х –* 1*+ =* 0.

2 = 0.

Введём замену. Пусть y = *x +*  , тогда:

*x*2 + = y2 – 2,

2y2 + 9y – 5 = 0,

y1 = - 5 , y2 = .

Возвращаемся к замене:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x +*  = - 5 | или | *x +*  = |
| *=* 0 |  | = 0 |
| *x*1,2 = |  | корней нет |

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня: *x*1,2 = .

*Ответ:*  , .

**Задача 10.** Решить уравнение: *x7+2х6-5х5-13х4-13х3-5х2+2х+1=0.*

Имеем симметрическое уравнение нечетной степени.

Очевидно, х = - 1 –корень уравнения. Тогда, разделив

x7*+2х6-5х5-13х4-13х3-5х2+2х+1 на х+1 ,* получим

*(х6+х5-6х4-7х3-6х2+х+1)(х+1)=0 ,*

Откуда *х = - 1* или *х6+х5-6х4-7х3-6х2+х+1=0*

Так как х = 0 – не является корнем уравнения ,то разделим обе части уравнения на х3 ≠ 0, получим:

*x3+х2-6х-7 - + + =0*

*+- 6 -7=0*

Введем замену .Пусть

*y= х + ,х2+ +у2-2 ,х3+ = уз -3у*

Получим

*у2+у2-9у-9=0*

Отсюда

*y = -1* или  *у=3* или *у=-3*

*x+ = -1 х+=3 х+=-3*

*=0 =0 =0*

корней нет *х1,2= х3,4=-*

*Ответ: - 1, ,.*

**Задача 11.** Решить уравнение:

2*x*8 - 9*х*7 + 20*х*6 - 33*х*5 + 46*х*4 - 66*х*3 + 80*х*2 - 72*х* + 32 = 0

Это – возвратное уравнение восьмой степени, у которого λ=2, так как его можно переписать в виде:

2*х*8 - 9*х*7+20*х*6 - 33*х*5 + 46*х*4 - 33·2*х*3 + 20·22·*х*2 - 9·23*х*+2·24 = 0.

Разделив обе части уравнения на *х*4 (*х*=0 не является его корнем) и сгруппировав члены, получим уравнение, эквивалентное данному:

2.

Положим у = *х* . Тогда

*x*2 +

И последнее уравнение примет вид:

2у4 - 9у3 + 4у2+ 31у-18=0

Корни этого уравнения будут равны:

y1 = 1, у2 = 2, у3 = 3, у4 = -

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности, состоящей из четырех уравнений:

Решая эту совокупность, находим корни исходного уравнения:

Х1,2==2,

*Ответ:*

**Задача 12.** Решить уравнение: (*x* + 1)(*x* + 2)(*x* + 3)(*x* + 4) = 120

Рассмотрим уравнение используя симметрию. Заметим, что сумма свободных членов в 1-ой и 4-ой скобках равна сумме свободных членов во 2-ой и 3-ей скобках. Значит, целесообразны следующие преобразования:

[(*x* + 1)(*x* + 4)] = 120

(*x*²+5*x* + 4)(*x*² + 5*x* + 6) = 120

делаем подстановку t= *x*² + 5*x* + 4, при этом получим:

t(t + 2) – 120 = 0 t1 = - 12 ; t2 = 10.

Таким образом: *x*² + 5*x* + 4 = - 12 или *x*² + 5*x* + 4 = 10

*x*² + 5*x* + 16 = 0 или *x*² + 5*x* – 6 = 0

x €или x = - 6 или x = 1.

*Ответ:* - 6, 1.

**Задача 13.** Решение уравнение: ( *x*2 – *x* +1)4 – 6*x*2(*x*2 – *x* + 1)2 + 5*x*4 = 0

Данное уравнение является однородным уравнением относительно двух многочленов p(*x*) = *x*2 – *x* + 1 и q(*x*) = *x*. Разделив обе части уравнения на *х*4 (х = 0 не является корнем), получаем равносильное уравнение:

+ 5 = 0.

Положив у = и решив уравнение у2 - 6у + 5 = 0, найдем у1 = 5 и у2 = 1.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

То есть совокупности

*х*2 – *х* + 1 = *х*2  - *х* +1 = -,

*х*2 – *х* + 1 = *х*, *х*2 – *х* + 1 = - *х*,

или

*х*2 – (1 + )*х* + 1 = 0, *х*2 – (1 - )*х* + 1 = 0,

*х*2  - 2*х* +1 = 0, *х*2 + 1 = 0.

Решив ее, получим корни исходного уравнения:

*x*1,2 = , *x*3,4  = 1, *x*5,6  = , *x*7,8=

*Ответ:* , 1, , .

**Задача 14.** Решить уравнение: 8*x*3 – 6*x* - √3 = 0 .

Решим уравнение, используя тригонометрическую подстановку. Поделим все члены уравнения на 2. Уравнение примет вид:

4*x*3 – 3*x* = .

Докажем, что все корни данного уравнения по модулю не больше единицы. Пусть > 1, тогда , . Получили, что при левая часть уравнения по модулю больше единицы, а правая – меньше единицы, что невозможно.

Сделаем замену: *x =* cos α, α. Уравнение имеет вид:

4cos3 α – 3 cos α = cos 3α = α = ± + , *n.*

Условию α удовлетворяют три значения:

Поскольку кубическое уравнение не может иметь больше трёх различных корней, то мы нашли все решения.

*Ответ:.*

**Задача 15:** Найти приближенные значения (округлённые до сотых) корней уравнения:

*х3* + 3*х2 –* 1 *=* 0

Оценим методом Штурма количество корней уравнения и их границы для данного уравнения.

Ему соответствует многочлен: *f (x)= х3* + 3*х2 –* 1*.*

Найдем число его действительных корней, а также целые границы, между которыми каждый их этих корней расположен, причем не будем строить заранее графика этого многочлена.

Система Штурма для многочлена *f (x)* будет:

*f (x)= х3* + 3*х2 –* 1

*f1 (x) =* 3*х2+* 6*х,*

*f2 (x) =* 2*х+* 1,

*f3 (x) =*1

Найдем число перемен знаков в этой системе при *х =-∞* и *х =∞*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *f (x)* | *f1 (x)* | *f2 (x)* | *f3 (x)* | Число перемен знаков |
| *-∞* | - | + | - | + | 3 |
| *∞* | + | + | + | + | 0 |

Многочлен *f (x)* обладает, следовательно, тремя действительными корнями. Для более точного определения положения этих корней продолжим предыдущую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *f (x)* | *f1 (x)* | *f2 (x)* | *f3 (x)* | *Число перемен знаков* |
| *х* = -3 | - | + | - | + | 3 |
| *х* = -2 | + | 0 | - | + | 2 |
| *х* = -1 | + | - | - | + | 2 |
| *х* = 0 | - | 0 | + | + | 1 |
| *х* = 1 | + | + | + | + | 0 |

Таким образом, система Штурма многочлена *f(x)* теряет по одной перемене знаков при переходе *x* от – 3 к – 2, от – 1 к 0 и от 0 к 1, следовательно корни уравнения удовлетворяют неравенствам:

-3 < α1 < - 2 , -1 < α2 < 0 , 0 < α3 < 1 .

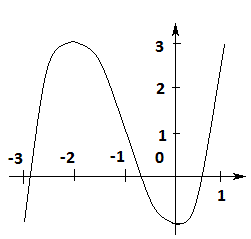
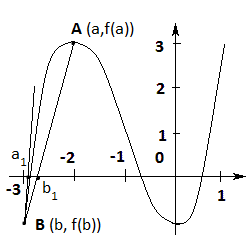
Найдём более точные значения корней методами приближенного вычисления.

Исследуем поведение функции *f* = *x3 +* 3*x*2 – 1.

*f* ʹ = 3*x*2 + 6*x* ; найдем точки экстремума: 3*x*2 + 6*x* = 0 *x* = 0, *x* = - 2.

Найдем точки перегиба: *f*ʺ = 6*x* + 6; 6*x* + 6 = 0 *x* = -1 – точка перегиба. Учитывая нижеизложенные расчёты, график *f* (*x*) схематично изобразим на

рис 9.

 Рис 9.  Рис 10.

Вычисляем α1. Возьмём точку *x=* -2,5 из промежутка . *fʹ(-2,5*)=3,75 ˃ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке возрастает. *fʺ(-2,5*) = - 9 ˂ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке выпукла вверх. *f(-3*) = - 1; *f(-2*) = 3. Итак граничные точки А(-3;-1), В(-2;3) (Рис 10). Для вычисления применим метод хорд и метод касательных.

*b1* = *a -* = - 3 - = - 2,75.

*f* ʹ*(-3*) = 9, *a*1 = *a -*  = - 3 - - 2,9.

Сделаем ещё одно приближение: = -0,159 ; = 0,891.

*b2* = - 2,9 - -2,88

*f* ʹ*(-2,9*) = 7,83 , *a*2 = - 2,9 - - 2,88 . Итак α1 -2,88 .

Вычисляем α2. Возьмём точку *x =* - 0,5 из промежутка . *fʹ(-0,5*) = - 2,25 ˂ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке убывает. *fʺ(-0,5*) = 3 ˃ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке вогнутая. За левый край интервала возьмём точку А(-0,9; 1) – это немного правее точки перегиба, тогда *f(a*) = *f(- 0,9*) = 0, 701; *f(b*) = *f(0*) = - 1, *f* ʹ*(- 0,9*) = - 2,97.

*b1* = - 0,345. *a*1 = - 0,9 – .

*f(a1*) = *f(-0,664*) = 0,03 , *f(b1*) = *f(-0,345*) = - 0,684 , *f* ʹ*(-*0,664) = - 2,016 .

*b2* = - 0,664 – - 0,65 ; *a*2 = - 0,664 – - 0,65.

Итак α2 - 0, 65 .

Вычисляем α3. Возьмём точку *x =* 0,5 из промежутка . *fʹ(0,5*) = 3,75 ˃ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке возрастает. *fʺ(0,5*) = 9 ˃ 0, следовательно *f* (*x*) на данном промежутке вогнутая. *f(1*) = 3; *f(0*)= -1, *f* ʹ*(1*) = 9.

*b1* = = 0,25 ; *a*1 = 1 - 0,68

Сделаем второе приближение: *f(a1*) = 0,701 ; *f(b1*)= - 0,797 ; *f* ʹ*(a1*) = 5,467.

*b2* = 0,48 ; *a*2 = 0,68 – 0,55 .

Результаты недостаточно точны – сделаем третье приближение: *f(a2*) = 0,0739 ; *f(b2*)= - 0,198 ; *f* ʹ*(a2*) = 4,2075.

*b3* = ; *a*3 = 0,55 – .

Итак α3 0,53

*Ответ:* -2,88 ; - 0, 65 ; 0,53 .

**3.2 Методические рекомендации по изучению решения алгебраических уравнений высших степеней в средней школе**

На старшей ступени обучения в средней школе учащиеся сталкиваются с разнообразными задачами, для решения которых им приходится составлять математические модели. Часто в качестве таких моделей выступают алгебраические уравнения высших степеней. Подобные задачи зачастую берутся из реальных жизненных ситуаций. В качестве примера рассмотрим такую задачу: Для составления электрической схемы требуется резистор сопротивлением 5 Ом. В наличии имеются резисторы с номинальным сопротивлением 12, 18, 24, 30, 36, 42 Ом. Можно ли, соединяя четыре из них параллельно, получить нужное сопротивление.

*Решение:* Общее сопротивление R параллельного соединения резисторов с сопротивлениями *r1, r2, r3,r4,* представлено зависимостью:

Введём некоторое число *x* и через него выразим наши сопротивления следующим образом: *r1* = 6(*x -* 1); *r2* = 6(*x +* 1); *r3* = 6(*x -* 2); *r4* = 6(*x + 2*). Тогда при R = 5 имеем:

+ + + =

Преобразуем левую часть уравнения:

+ = =

*=*

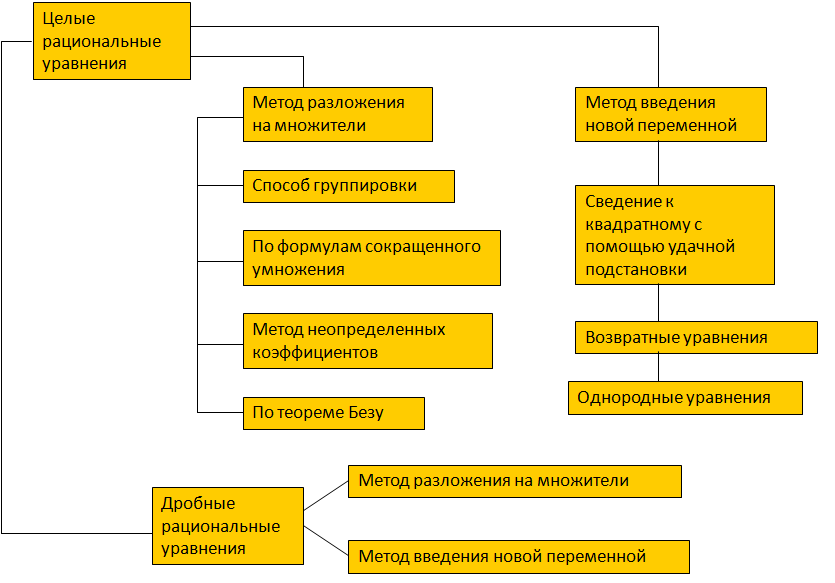
6() = 5()

3*х*4 – 10*х*3 – 15*х*2 + 25*х* + 12 = 0

Как видим, математической моделью реальной ситуации выступает алгебраическое уравнение четвёртой степени. Для решения данного уравнения у учащихся не хватает знаний, полученных ими в базовом курсе основной школы. Здесь им необходимы дополнительные знания методов и новые приёмы решения уравнений высших степеней. Подобная связь задач из реальной жизни с чистой математикой позволяет в значительной степени замотивировать учащихся на изучение соответствующих разделов математики.

Для расширения спектра решаемых алгебраических уравнений могут учащиеся могут получить необходимые знания, изучая математику на профильном уровне или прослушав нужный элективный курс или заняться индивидуальным обучением. Для достижения поставленных задач, нами были сформулированы следующие методические рекомендации:

* изучить и освоить на практике следующие теоремы: теорему Безу, теорему о рациональных корнях приведённого уравнения с целыми коэффициентами; освоить алгоритмы деления многочлен на многочлен «в столбик», схему Горнера; изучить методы решения симметрических и возвратных уравнений.
* Имеющееся уравнение отнести к соответствующему типу, согласно предложенной схеме 1.
* Решить заданное уравнение изученными методами и провести проверку решения.

 Схема 1.

Одним из примеров реализации обучения решению алгебраических уравнений высших степеней является УМК А.Г. Мордковича профильного уровня для старшей школы. В данном УМК в 11 классе введена в изучение глава «многочлены». В данной главе более подробно изучаются многочлены и операции над ними. В указанной главе изучаются целый ряд теорем и алгоритмов, не изучаемых на базовом уровне. В частности, рассматриваются алгоритм деления многочлена на многочлен с остатком (так называемое деление «в столбик»), схема Горнера, теоремы Безу, теоремы о рациональных корнях многочлена и её следствия, теорему о симметрических многочленах, ещё некоторые теоремы, касающиеся данной темы. В качестве примеров применения указанных теорем и алгоритмов разбирается целый ряд решений различных алгебраических уравнений высших степеней.

Решение некоторых алгебраических уравнений высших степеней требует нестандартного подхода. Поиск решений таких уравнений способствует развитию у учащихся творческого мышления и личной индивидуальности.

**Заключение**

Методы математических расчетов человек использовал с давних времен. Становление и развитие математики как науки, возникновение её новых разделов тесно связано с развитием потребностей общества в измерениях, контроле, в таких областях деятельности как промышленность, сельское хозяйство, строительство и многих других. Понятие числа было неотделимо от культурного прогресса времени, а смысл числа всегда сопровождался и числовыми выражениями, и иллюстрациями. Математика придавала законченный вид всем наукам, где она применялась. Очень большие вычисления связаны с физикой, химией. Многие задачи вычислений связаны с уравнениями и их решением.

Первое знакомство с уравнениями происходит в школьном курсе математики уже в четвёртом классе. В дальнейшем учащиеся знакомятся со всё более сложными уравнениями.

В работе рассмотрена теория многочленов, как основа для получения решений уравнений. Доступно изложены понятия многочлен, уравнение и их корни. Рассмотрен целый ряд частных методов решений уравнений высших степеней. В работе рассмотрено использование алгоритма Евклида, метода Горнера, формулы Виета, теорема Штурма, некоторые методы приближенного вычисления корней. Система задач подобрана таким образом, что отражает применение рассмотренных методов решения на практике.

Настоящая работа будет полезна для студентов физико-математических факультетов и для учащихся средних общеобразовательных учреждений, изучающих математику на профильном уровне, а также всем учащимся школ, интересующимся углубленным изучением математики, включая элективные курсы, по вопросам, которые рассматриваются в данной работе.

В работе рассмотрены различные методы решения уравнений высших степеней. Цель работы достигнута, поставленные задачи решены.

**Список использованной литературы**

1. Винберг, Э.Б. Алгебра многочленов: Учебное пособие для студентов-заочников III-IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов / Э.Б. Винберг – М.: Просвещение, 1980. 175 с.
2. Гашков, С.Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях / С.Б. Гашков – М.: МЦНМО, 2006. – 328 с.
3. Дорофеев, Г.В. Многочлены с одной переменной / Г.В. Дорофеев, С.В. Пчелинцев //Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 2001. – 142 с.
4. Кравчук, Д.Н. Сборник задач по математике с решениями / Д.Н. Кравчук, Е.В. Кравчук, С.И. Клемина // – Донецк: ПКФ БАО, 1997. – 192 с.
5. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для педагогических университетов / Куликов Л.Я. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
6. Куликов, Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, Ф.Л. Фомин // – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.
7. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям «математика, прикладная математика» / А.Г. Курош – СПб.: Лань, 2007. – 432 с.
8. Ляпин Е.С. Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Часть II. Линейная алгебра и полиномов. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев // – М.: Просвещение, 1978. – 448 с.
9. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под. Ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.
10. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов // – М.: Мнемозина, 2012. – 287 с.
11. Мордкович, А.Г. О некоторых вопросах, связанных с решением уравнений / Мордкович А.Г. // Мат-ка в шк. 2006. №3. С 25-34.
12. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра: Учебник / Л.Я. Окунев – СПб.: Лань, 2009.- 336 с.
13. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре: учебное пособие / Л.Я. Окунев – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.
14. Потапов, М.Л. Умножение уравнения или неравенства на функцию/ М.К. Потапов, А.В. Шевкин, Т.М. Вуколова // Мат-ка в шк. 2006. №10. С 32-36.
15. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
16. Солодовникова, А.С. Задачник-практикум по алгебре. Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов / А.С. Солодовников, М.А. Роидина // – М.: Просвещение, 1985.– 127с.
17. Ткачёва, М.В. О новых учебниках по алгебре и началам анализа / М.В. Ткачёва, Н.Е. Федорова // Мат-ка в шк. 2007. №6. С 7-13.
18. Черемисина, М.И. Избранные вопросы алгебры полиномов: учебное пособие / М.И. Черемисина – Оренбург: ООО «Агентство «Пресса», 2011. – 38 с.
19. Фадеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учебное пособие / Д.К. Фадеев, И.С. Соломинский // – СПб «Лань», 2008. – 288 с.
20. И.И. Чучаев О некоторых вопросах, связанных с решением уравнений/ И.И. Чучаев// Мат-ка в шк. 2006. №8. С 39-47.
21. И.И. Чучаев, М.Н. Осипова Задачи на доказательство при решении уравнений/ И.И. Чучаев, М.Н. Осипова// Мат-ка в шк. 2010. №10. С 23-29.